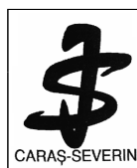




MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România,

Filiala Caraș - Severin



**Olimpiada Națională de Matematică, etapa locală (OLM), Caraș – Severin, 18.02.2023,**

**Clasa a X-a**

○ Timp de lucru: 180 de minute.

○ Fiecare problemă se punctează cu 0 – 7 puncte.

**Problema 1.** Determinați numerele reale  $a$  pentru care  $\sqrt[3]{7-a\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7+a\sqrt{2}} = 2$ .

**Problema 2.** (a) Arătați că, dacă  $A = \log_7 98$  și  $B = \log_2 28$ , atunci  $C = \frac{1}{A-1} + \frac{1}{B-1}$  este număr rațional.

(b) Rezolvați ecuația  $a^{x-2} = (1-a) \cdot x + 4a - 3$ , unde  $a > 0, a \neq 1$ , este un număr real fixat..

**Problema 3.** Fie  $z \in \mathbb{C}$  și  $a > 0$ , astfel încât  $|z| \leq a$ . Demonstrați că  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z+a}\right) \geq \frac{1}{a^2+1}$ .

**Problema 4.** (a) Dați un exemplu de funcție  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  care este injectivă, dar nu este surjectivă și un exemplu de funcție  $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  care este surjectivă, dar nu este injectivă.

(b) Determinați numărul  $h(2023)$  știind că  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție injectivă cu proprietățile:

(I)  $h(1) \neq 1$ .

(II)  $h(x) \cdot h(y) = x \cdot h(y) + y \cdot h(x) - h(xy), \forall x, y \in \mathbb{R}$ .